Лекция №3. Элементы векторной алгебры

Определение. Вектором называется отрезок с выбранным направлением, или направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и с концом в точке B обозначается через $\vec{AB}$, кроме того, вектор можно обозначать одним символом, например $\vec{a}$.

Вектор, у которого начало совпадает с его концом, называется нулевым вектором и обозначается через $\vec{0}$. Длина отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$, называется модулем этого вектора и обозначается $\left|\vec{a}\right|$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, параллельные одной прямой называются коллинеарными. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если они равны по модулю, коллинеарный и одинаково направлены. Из этого определения следует, что при параллельном переносе вектор не меняется, по этому в качестве начала вектора можно выбрать любую точку.

Линейными операциями над векторами называются умножение вектора на число и сложение векторов.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется такой вектор $\alpha\vec{a}$, что выполняются три условия.

1) $\left|\alpha\vec{a}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right|$; 2) $\alpha\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) Вектор $\alpha\vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, если $\alpha > 0$ и направлен в противоположную сторону, если $\alpha < 0$.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки, называется вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящий из той же точки. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не исходят из одной точки, то их начала необходимо с помощью параллельного переноса перенести в одну точку. Это определение называется правилом параллелограмма. При сложении большого числа векторов удобнее пользоваться следующим определением, равносильным предыдущему.

Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, у которых начало $\vec{a}_i$ вектора совпадает с концом $\vec{a}_{i-1}$ $(i = 2 \div k)$, является вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}_1$ с концом вектора $\vec{a}_k$.

Эти линейные операции над векторами обладают следующими свойствами.

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; **2.** $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; **3.** $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$; **4.** $(\alpha+\beta)\left(\vec{a}\right) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; **6.** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$; **7.** $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\alpha$.

Операция разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сводится к двум линейным операциям: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$, однако часто удобней пользоваться следующим специальным определением, равносильным вышеприведённому.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки называется вектор, соединяющий конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ и направленный в сторону конца вектора $\vec{a}$.

Определение. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ с коэффициентами $C_1, C_2, ..., C_n$ называется вектор $C_1\vec{a}_1+C_2\vec{a}_2+...+C_n\vec{a}_n$.

Эта комбинация обладает двумя основными свойствами.

1)Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ коллинеарны некоторой прямой, то любая их линейная комбинация будет коллинеарна той же прямой. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

2)Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ компланарны некоторой плоскости, то любая их линейная комбинация компланарна той же плоскости.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $C_1, C_2, ..., C_n$, не все равные нулю, что $C_1\vec{a}_1+C_2\vec{a}_2+...+C_n\vec{a}_n=0$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно независимыми.

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов называется базисом.

Множество всех плоских или пространственных векторов в которых определены операции сложения векторов и умножение вектора на число, являются простейшими примерами векторного пространства.

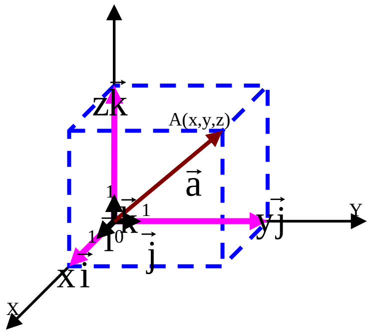
Определение. Множество векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше семи свойствам называется векторным пространством. Оказывается, что в любом векторном пространстве всегда можно выбрать несколько векторов, из которых с помощью линейных комбинаций однозначно можно получить любой вектор этого пространства и которые являются базисными.

Определение. Любой ненулевой вектор $\vec{e}$ на прямой называется базисным вектором этой прямой. Любая пара неколлинеарных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ плоскости называется базисом этой плоскости. Любая тройка некомпланарных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ называется базисом пространства.

Определение. Коэффициенты линейной комбинации базисных векторов, выражающие вектор $\vec{a}$ на прямой, в плоскости или в пространстве называются, координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе. Вектор, лежащий на прямой, имеет одну координату x, на плоскости – две координаты x, y; в пространстве – три координаты x, y, z. Векторы удобно отождествлять с координатами в некотором выбранном базисе. Так, вектор $\vec{a}$ в пространстве записывают в виде: $\vec{a} = (x, y, z)$.

Теорема. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пусть в пространстве имеется декартова система координат $Oxyz$. С ней связан стандартный базис из единичных взаимно перпендикулярных векторов, расположенных вдоль осей Ox, Oy, Oz. Эти базисные вектора обозначаются через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Определение. Вектор, начало которого находится в начале координат, а конец в точке A, т.е. вектор $\vec{OA}$, называется радиус-вектором точки А. Если (x, y, z) – координаты точки A в системе $Oxyz$, то радиус-вектор $\vec{OA}$ можно записать в виде $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поэтому координаты точки $A(x, y, z)$ в системе $Oxyz$ и вектора $\vec{OA}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\}$ – это одни и те же числа.

Теорема. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ заданы две точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\}$ вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $((x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A))$.

Теорема. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\}$, тогда $x = \text{ПР}_{Ox}\vec{a}$, $y = \text{ПР}_{Oy}\vec{a}$, $z = \text{ПР}_{Oz}\vec{a}$.

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ (обозначение $\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}$) называется его проекция на ось L, проведенная через вектор $\vec{b}$.

Теорема 2. Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на плоскости Oxy находится по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Теорема 3. Расстояние между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ в пространстве $Oxyz$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Пример. Пусть A(1,1,1), B(2,3,–1). Найдем $|AB|$.

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Определение. Разделить отрезок AB в отношении λ $(\lambda > 0)$ это значит найти на нём такую точку M, что $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \lambda.$

Теорема. Пусть точка $M(x_M, y_M, z_M)$ делит отрезок AB в отношении λ, где $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда

$$\left\{ x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} \right.$$

Следствие. Если точка M является серединой отрезка AB, то

$$\left\{ x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}. \right.$$

Эти формулы получаются из формул теоремы при $\alpha = \beta = 1$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).$$

Скалярное произведение обозначается символами $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно соотношение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{ПР}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}|\, \text{ПР}_{\vec{b}}\, \vec{a}$.

Теорема. Пусть в базисе $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\vec{b} - (x_1, y_1, z_1)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Пример. Если $\vec{a} = (1,2,3)$, а $\vec{b} = (4,5,6)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$

Следствие 1. Если вектор $\vec{a} = (x, y, z)$, в базисе $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Следствие 2. Косинус угла φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ равен:

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Следствие 3. Векторы $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярны только в том случае, когда $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Определение. Направляющими косинусами ненулевого вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат Ox, Oy, Oz.

Обычно эти углы обозначаются через α, β, γ.

Следствие 4. Для вектора $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) направляющие косинусы записываются в виде: $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям: **а)** Модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними: $\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$; **в)** $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. он перпендикулярен плоскости, проходящей через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$; **с)** Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая.

1°. В отличие от скалярного произведения, векторное произведение антикоммутативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно: $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$.

2°. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны только в том случае, когда $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа λ верно $\left(\alpha\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

4°. Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}$ верно $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b} = \vec{a}_1\times\vec{b} + \vec{a}_2\times b$.

Теорема. Пусть в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно.

Тогда в этом базисе $\vec{a}\times\vec{b} = ((y_1z_2 - z_1y_2), (x_1z_2 - z_1x_2), (x_1y_2 - y_1x_2))$.

Для запоминания этой формулы используется её запись в виде условного определителя:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

который необходимо разложить по первой строке.

Пример. Пусть $\vec{a}=(1,2,3,)$, $\vec{b}=(4,5,6)$,

Найдем $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\left(2\cdot6-3\cdot5\right)-\vec{j}\left(1\cdot6-3\cdot4\right)+\vec{k}\left(1\cdot5-2\cdot4\right)=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}=(-3,\,6,-3).$$

Следствие 1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ и $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, равна: $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(y_1z_2-z_1y_2)^2+(x_1z_2-z_1x_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}$.

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна:

$$S_{тр}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1z_2-z_1y_2)^2+(x_1z_2-z_1x_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}.$$

Следствие 2. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(x_1,y_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2)$, лежащих в плоскости Oxy, равна: $S_{пар}=\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$. Площадь треугольника, построенного на векторах, равна: $S_{тр}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$.

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с вектором $\vec{c}$.

Оно обозначается символами $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{n}$ или $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{n}:\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{n}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1^0. Смешанное произведение векторов $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ равно $\pm$ объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm V_{пар}$. Здесь знак «+» берется в случае, если тройка векторов $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ – правая, «–» если она левая.

2^0. Векторы $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{n}$ – являются компланарными только в том случае, когда их смешанное произведение равно 0: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

3^0. При перестановке местами любых двух векторов смешанного произведения оно меняет свой знак на противоположный; т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{n}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$$

4^0. Постоянный сомножитель можно выносить из любого сомножителя смешанного произведения, т.е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и числа λ $\left(\lambda \vec{a}\right)\vec{b}\,\vec{c} = \lambda\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

5^0. Смешанное произведение дистрибутивно для любого сомножителя, т.е. для любых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \quad \vec{b}, \vec{c}$ верно: $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}_2\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Теорема. Пусть в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют координаты соответственно (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), тогда их смешанное произведение записывается в виде определителя: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Следствие. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1,),\quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2,),\quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3,)$, равен: $V_{пар} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды), образованного этими векторами, равен:

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}|abc|.$$

Основная литература**:** [1] § 5,6,7 стр. 34-48
Дополнительная литература: [19] 1.3-1.4, 1.10-1.13 стр. 12-20, 66-72, 83-87

Контрольные вопросы

1. Дать определение вектора.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Физический смысл скалярного произведения.
4. В чем заключается механический смысл векторного произведения?
5. Укажите условие коллинеарности двух векторов.